Mecánica Clásica Alternativa II

Alejandro A. Torassa

(2014) Buenos Aires, Argentina
atorassa@gmail.com

- versión 1 -

Este trabajo presenta una mecánica clásica alternativa que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia y que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir fuerzas ficticias.

Sistema de Referencia Universal

En este trabajo, el sistema de referencia universal $\mathring{S}$ es un sistema de referencia fijo al universo, cuyo origen coincide con el centro de masa del universo.

La posición universal $\mathring{\mathbf{r}}_a$, la velocidad universal $\mathring{\mathbf{v}}_a$ y la aceleración universal $\mathring{\mathbf{a}}_a$ de una partícula A respecto al sistema de referencia universal $\mathring{S}$, son como sigue:

$$\mathring{\mathbf{r}}_a \doteq (\mathbf{r}_a)$$

$$\mathring{\mathbf{v}}_a \doteq d(\mathbf{r}_a)/dt$$

$$\mathring{\mathbf{a}}_a \doteq d^2(\mathbf{r}_a)/dt^2$$

donde $\mathbf{r}_a$ es la posición de la partícula A respecto al sistema de referencia universal $\mathring{S}$.

Nueva Dinámica

[1] Una fuerza siempre es causada por la interacción entre dos partículas.

[2] La fuerza neta $\mathbf{F}_a$ que actúa sobre una partícula A de masa m_a produce una aceleración universal $\mathring{\mathbf{a}}_a$ según la siguiente ecuación: $\mathbf{F}_a = m_a\,\mathring{\mathbf{a}}_a$

[3] Si una partícula A ejerce una fuerza $\mathbf{F}_b$ sobre una partícula B entonces la partícula B ejerce sobre la partícula A una fuerza $-\mathbf{F}_a$ igual y de sentido contrario $(\mathbf{F}_b = -\mathbf{F}_a)$

Definiciones

Para un sistema de N partículas, las siguientes definiciones son aplicables:

Masa	$M \doteq \sum_i m_i$
Momento Lineal	$\mathring{\mathbf{P}} \doteq \sum_i m_i \mathring{\mathbf{v}}_i$
Momento Angular	$\mathring{\mathbf{L}} \doteq \sum_i m_i \mathring{\mathbf{r}}_i \times \mathring{\mathbf{v}}_i$
Trabajo	$\mathring{W} \doteq \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathring{\mathbf{r}}_i = \sum_i \Delta\, {}^1\!/_2\, m_i\, (\mathring{\mathbf{v}}_i)^2$
Energía Cinética	$\Delta \mathring{K} \doteq \sum_i \Delta\, {}^1\!/_2\, m_i\, (\mathring{\mathbf{v}}_i)^2$
Energía Potencial	$\Delta \mathring{U} \doteq \sum_i - \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathring{\mathbf{r}}_i$
Lagrangiano	$\mathring{L} \doteq \mathring{K} - \mathring{U}$

Principios de Conservación

Si un sistema de N partículas es aislado entonces el momento lineal $\mathring{\mathbf{P}}$ del sistema de partículas permanece constante.

$$\mathring{\mathbf{P}} = \text{constante} \qquad \left[\, d(\mathring{\mathbf{P}})/dt = \sum_i m_i \mathring{\mathbf{a}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i = 0 \,\right]$$

Si un sistema de N partículas es aislado entonces el momento angular $\mathring{\mathbf{L}}$ del sistema de partículas permanece constante.

$$\mathring{\mathbf{L}} = \text{constante} \qquad \left[\, d(\mathring{\mathbf{L}})/dt = \sum_i m_i \mathring{\mathbf{r}}_i \times \mathring{\mathbf{a}}_i = \sum_i \mathring{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{F}_i = 0 \,\right]$$

Si un sistema de N partículas está sujeto sólo a fuerzas conservativas entonces la energía mecánica $\mathring{E}$ del sistema de partículas permanece constante.

$$\mathring{E} \doteq \mathring{K} + \mathring{U} = \text{constante} \qquad \left[\, \Delta \mathring{E} = \Delta \mathring{K} + \Delta \mathring{U} = 0 \,\right]$$

Transformaciones

La posición universal $\mathring{\mathbf{r}}_a$, la velocidad universal $\mathring{\mathbf{v}}_a$ y la aceleración universal $\mathring{\mathbf{a}}_a$ de una partícula A respecto a un sistema de referencia S, están dadas por:

$$\mathring{\mathbf{r}}_a = \mathbf{r}_a - \mathbf{R}$$

$$\mathring{\mathbf{v}}_a = \mathbf{v}_a - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{R}) - \mathbf{V}$$

$$\mathring{\mathbf{a}}_a = \mathbf{a}_a - 2\,\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_a - \mathbf{V}) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{R})] - \boldsymbol{\alpha} \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{R}) - \mathbf{A}$$

donde $\mathbf{r}_a$, $\mathbf{v}_a$ y $\mathbf{a}_a$ son la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula A respecto al sistema de referencia S. $\mathbf{R}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{A}$ son la posición, la velocidad y la aceleración del centro de masa del universo respecto al sistema de referencia S. $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son la velocidad angular y la aceleración angular del universo respecto al sistema de referencia S.

La posición $\mathbf{R}$, la velocidad $\mathbf{V}$ y la aceleración $\mathbf{A}$ del centro de masa del universo respecto al sistema de referencia S, y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del universo respecto al sistema de referencia S, son como sigue:

$$M \doteq \textstyle\sum_i^{all} m_i$$

$$\mathbf{R} \doteq M^{-1} \textstyle\sum_i^{all} m_i \, \mathbf{r}_i$$

$$\mathbf{V} \doteq M^{-1} \textstyle\sum_i^{all} m_i \, \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{A} \doteq M^{-1} \textstyle\sum_i^{all} m_i \, \mathbf{a}_i$$

$$\boldsymbol{\omega} \doteq \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{L}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \doteq d(\boldsymbol{\omega})/dt$$

$$\mathbf{I} \doteq \textstyle\sum_i^{all} m_i \, [|\mathbf{r}_i - \mathbf{R}|^2 \, \mathbf{1} - (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \otimes (\mathbf{r}_i - \mathbf{R})]$$

$$\mathbf{L} \doteq \textstyle\sum_i^{all} m_i \, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V})$$

donde M es la masa del universo, $\mathbf{I}$ es el tensor de inercia del universo (respecto a $\mathbf{R}$) y $\mathbf{L}$ es el momento angular del universo respecto al sistema de referencia S.

Observaciones Generales

La mecánica clásica alternativa de partículas presentada en este trabajo es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia y puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir fuerzas ficticias.

Este trabajo considera que si todas las fuerzas obedecen la tercera ley de Newton (en su forma fuerte) entonces el sistema de referencia universal $\mathring{\mathrm{S}}$ es siempre inercial. Por lo tanto, un sistema de referencia S es también inercial cuando $\boldsymbol{\omega} = 0$ y $\mathbf{A} = 0$.

Sin embargo, si una fuerza no obedece la tercera ley de Newton (en su forma fuerte o en su forma débil) entonces el sistema de referencia universal $\mathring{\mathrm{S}}$ es no inercial y el sistema de referencia S es también no inercial cuando $\boldsymbol{\omega} = 0$ y $\mathbf{A} = 0$.

Por lo tanto, si una fuerza no obedece la tercera ley de Newton (en su forma fuerte o en su forma débil) entonces la nueva dinámica y los principios de conservación son falsos.

Sin embargo, este trabajo considera, por un lado, que todas las fuerzas obedecen la tercera ley de Newton (en su forma fuerte) y, por otro lado, que todas las fuerzas son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia $(\mathbf{F}' = \mathbf{F})$

Bibliografía

D. Lynden-Bell and J. Katz, Classical Mechanics without Absolute Space (1995)

J. Barbour, Scale-Invariant Gravity: Particle Dynamics (2002)

R. Ferraro, Relational Mechanics as a Gauge Theory (2014)

A. Torassa, Sobre La Mecánica Clásica (1996)

A. Torassa, Mecánica Clásica Alternativa (2013)

A. Torassa, Una Reformulación de la Mecánica Clásica (2014)

A. Torassa, Un Nuevo Principio de Conservación de la Energía (2014)

Apéndice

Para un sistema de N partículas, las siguientes definiciones son también aplicables:

Momento Angular $\quad \mathring{\mathbf{L}}' \doteq \sum_i m_i\,(\mathring{\mathbf{r}}_i - \mathring{\mathbf{r}}_{cm}) \times (\mathring{\mathbf{v}}_i - \mathring{\mathbf{v}}_{cm})$

Trabajo $\quad \mathring{W}' \doteq \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathring{\mathbf{r}}_i - \mathring{\mathbf{r}}_{cm}) = \sum_i \Delta\, 1/2\, m_i\,(\mathring{\mathbf{v}}_i - \mathring{\mathbf{v}}_{cm})^2$

Energía Cinética $\quad \Delta\,\mathring{K}' \doteq \sum_i \Delta\, 1/2\, m_i\,(\mathring{\mathbf{v}}_i - \mathring{\mathbf{v}}_{cm})^2$

Energía Potencial $\quad \Delta\,\mathring{U}' \doteq \sum_i - \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathring{\mathbf{r}}_i - \mathring{\mathbf{r}}_{cm})$

Lagrangiano $\quad \mathring{L}' \doteq \mathring{K}' - \mathring{U}'$

donde $\mathring{\mathbf{r}}_{cm}$ y $\mathring{\mathbf{v}}_{cm}$ son la posición universal y la velocidad universal del centro de masa del sistema de partículas. $\sum_i \int_1^2 m_i\, \mathring{\mathbf{a}}_i \cdot d(\mathring{\mathbf{r}}_i - \mathring{\mathbf{r}}_{cm}) = \sum_i \int_1^2 m_i\,(\mathring{\mathbf{a}}_i - \mathring{\mathbf{a}}_{cm}) \cdot d(\mathring{\mathbf{r}}_i - \mathring{\mathbf{r}}_{cm}) = \sum_i \Delta\, 1/2\, m_i\,(\mathring{\mathbf{v}}_i - \mathring{\mathbf{v}}_{cm})^2$

Si un sistema de N partículas es aislado entonces el momento angular $\mathring{\mathbf{L}}'$ del sistema de partículas permanece constante.

$$\mathring{\mathbf{L}}' = \text{constante}$$

$$d(\mathring{\mathbf{L}}')/dt = \sum_i m_i\,(\mathring{\mathbf{r}}_i - \mathring{\mathbf{r}}_{cm}) \times (\mathring{\mathbf{a}}_i - \mathring{\mathbf{a}}_{cm}) = \sum_i m_i\,(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}) \times \mathring{\mathbf{a}}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0$$

$$\mathring{\mathbf{L}}' \doteq \sum_i m_i\,(\mathring{\mathbf{r}}_i - \mathring{\mathbf{r}}_{cm}) \times (\mathring{\mathbf{v}}_i - \mathring{\mathbf{v}}_{cm}) = \sum_i m_i\,(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}) \times [\,\mathbf{v}_i - \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}) - \mathbf{v}_{cm}\,]$$

Si un sistema de N partículas es aislado y está sujeto sólo a fuerzas conservativas entonces la energía mecánica $\mathring{E}'$ del sistema de partículas permanece constante.

$$\mathring{E}' \doteq \mathring{K}' + \mathring{U}' = \text{constante}$$

$$\Delta\,\mathring{E}' = \Delta\,\mathring{K}' + \Delta\,\mathring{U}' = 0$$

$$\Delta\,\mathring{K}' \doteq \sum_i \Delta\, 1/2\, m_i\,(\mathring{\mathbf{v}}_i - \mathring{\mathbf{v}}_{cm})^2 = \sum_i \Delta\, 1/2\, m_i\,[\,\mathbf{v}_i - \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}) - \mathbf{v}_{cm}\,]^2$$

$$\Delta\,\mathring{U}' \doteq \sum_i - \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathring{\mathbf{r}}_i - \mathring{\mathbf{r}}_{cm}) = \sum_i - \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}) = \sum_i - \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$$

donde $\mathbf{r}_{cm}$ y $\mathbf{v}_{cm}$ son la posición y la velocidad del centro de masa del sistema de partículas respecto a un sistema de referencia S y $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del universo respecto al sistema de referencia S.

Mecánica Clásica Alternativa II

- versión 1 -

Todas las fuerzas obedecen la tercera ley de Newton (en su forma fuerte)

El sistema de referencia universal $\mathring{\text{S}}$ es un sistema de referencia fijo al universo, cuyo origen coincide con el centro de masa del universo.

Por lo tanto, el sistema de referencia universal $\mathring{\text{S}}$ es siempre inercial y un sistema de referencia S es también inercial cuando $\boldsymbol{\omega} = 0$ y $\mathbf{A} = 0$.

- versión 2 -

Todas las fuerzas obedecen la tercera ley de Newton (en su forma fuerte o en su forma débil)

El sistema de referencia universal $\mathring{\text{S}}$ es un sistema de referencia no rotante $(\breve{\omega}_{\mathring{\text{S}}} = 0)$ cuyo origen coincide con el centro de masa del universo.

Por lo tanto, el sistema de referencia universal $\mathring{\text{S}}$ es siempre inercial y un sistema de referencia S es también inercial cuando $\breve{\omega}_{\text{S}} = 0$ y $\mathbf{A} = 0$.

Mecánica Clásica Alternativa II

Alejandro A. Torassa

(2014) Buenos Aires, Argentina
atorassa@gmail.com

- versión 2 -

Este trabajo presenta una mecánica clásica alternativa que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia y que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir fuerzas ficticias.

Sistema de Referencia Universal

En este trabajo, el sistema de referencia universal $\mathring{S}$ es un sistema de referencia no rotante $(\breve{\omega}_{\mathring{S}} = 0)$ cuyo origen coincide con el centro de masa del universo.

La posición universal $\mathring{\mathbf{r}}_a$, la velocidad universal $\mathring{\mathbf{v}}_a$ y la aceleración universal $\mathring{\mathbf{a}}_a$ de una partícula A respecto al sistema de referencia universal $\mathring{S}$, son como sigue:

$$\mathring{\mathbf{r}}_a \doteq (\mathbf{r}_a)$$

$$\mathring{\mathbf{v}}_a \doteq d(\mathbf{r}_a)/dt$$

$$\mathring{\mathbf{a}}_a \doteq d^2(\mathbf{r}_a)/dt^2$$

donde $\mathbf{r}_a$ es la posición de la partícula A respecto al sistema de referencia universal $\mathring{S}$.

Nueva Dinámica

[1] Una fuerza siempre es causada por la interacción entre dos partículas.

[2] La fuerza neta $\mathbf{F}_a$ que actúa sobre una partícula A de masa m_a produce una aceleración universal $\mathring{\mathbf{a}}_a$ según la siguiente ecuación: $\mathbf{F}_a = m_a\,\mathring{\mathbf{a}}_a$

[3] Si una partícula A ejerce una fuerza $\mathbf{F}_b$ sobre una partícula B entonces la partícula B ejerce sobre la partícula A una fuerza $-\mathbf{F}_a$ igual y de sentido contrario $(\mathbf{F}_b = -\mathbf{F}_a)$

Definiciones

Para un sistema de N partículas, las siguientes definiciones son aplicables:

Masa	$M \doteq \sum_i m_i$
Momento Lineal	$\mathring{\mathbf{P}} \doteq \sum_i m_i \mathring{\mathbf{v}}_i$
Momento Angular	$\mathring{\mathbf{L}} \doteq \sum_i m_i \mathring{\mathbf{r}}_i \times \mathring{\mathbf{v}}_i$
Trabajo	$\mathring{W} \doteq \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathring{\mathbf{r}}_i = \sum_i \Delta\, {}^1\!/\!_2\, m_i\, (\mathring{\mathbf{v}}_i)^2$
Energía Cinética	$\Delta \mathring{K} \doteq \sum_i \Delta\, {}^1\!/\!_2\, m_i\, (\mathring{\mathbf{v}}_i)^2$
Energía Potencial	$\Delta \mathring{U} \doteq \sum_i -\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathring{\mathbf{r}}_i$
Lagrangiano	$\mathring{L} \doteq \mathring{K} - \mathring{U}$

Principios de Conservación

Si un sistema de N partículas es aislado entonces el momento lineal $\mathring{\mathbf{P}}$ del sistema de partículas permanece constante.

$$\mathring{\mathbf{P}} = \text{constante} \qquad \left[\, d(\mathring{\mathbf{P}})/dt = \sum_i m_i \mathring{\mathbf{a}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i = 0 \,\right]$$

Si un sistema de N partículas es aislado entonces el momento angular $\mathring{\mathbf{L}}$ del sistema de partículas permanece constante.

$$\mathring{\mathbf{L}} = \text{constante} \qquad \left[\, d(\mathring{\mathbf{L}})/dt = \sum_i m_i \mathring{\mathbf{r}}_i \times \mathring{\mathbf{a}}_i = \sum_i \mathring{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{F}_i = 0 \,\right]$$

Si un sistema de N partículas está sujeto sólo a fuerzas conservativas entonces la energía mecánica $\mathring{E}$ del sistema de partículas permanece constante.

$$\mathring{E} \doteq \mathring{K} + \mathring{U} = \text{constante} \qquad \left[\, \Delta \mathring{E} = \Delta \mathring{K} + \Delta \mathring{U} = 0 \,\right]$$

Transformaciones

La posición universal $\mathring{\mathbf{r}}_a$, la velocidad universal $\mathring{\mathbf{v}}_a$ y la aceleración universal $\mathring{\mathbf{a}}_a$ de una partícula A respecto a un sistema de referencia S fijo a una partícula S, están dadas por:

$$\mathring{\mathbf{r}}_a = \mathbf{r}_a - \mathbf{R}$$

$$\mathring{\mathbf{v}}_a = \mathbf{v}_a + \breve{\omega}_S \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{R}) - \mathbf{V}$$

$$\mathring{\mathbf{a}}_a = \mathbf{a}_a + 2\,\breve{\omega}_S \times (\mathbf{v}_a - \mathbf{V}) + \breve{\omega}_S \times [\breve{\omega}_S \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{R})] + \breve{\alpha}_S \times (\mathbf{r}_a - \mathbf{R}) - \mathbf{A}$$

donde $\mathbf{r}_a$, $\mathbf{v}_a$ y $\mathbf{a}_a$ son la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula A respecto al sistema de referencia S. $\mathbf{R}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{A}$ son la posición, la velocidad y la aceleración del centro de masa del universo respecto al sistema de referencia S. $\breve{\omega}_S$ y $\breve{\alpha}_S$ son la velocidad angular dinámica y la aceleración angular dinámica del sistema de referencia S.

La posición $\mathbf{R}$, la velocidad $\mathbf{V}$ y la aceleración $\mathbf{A}$ del centro de masa del universo respecto al sistema de referencia S, y la velocidad angular dinámica $\breve{\omega}_S$ y la aceleración angular dinámica $\breve{\alpha}_S$ del sistema de referencia S, son como sigue:

$$M \doteq \textstyle\sum_i^{all} m_i$$

$$\mathbf{R} \doteq M^{-1} \textstyle\sum_i^{all} m_i\,\mathbf{r}_i$$

$$\mathbf{V} \doteq M^{-1} \textstyle\sum_i^{all} m_i\,\mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{A} \doteq M^{-1} \textstyle\sum_i^{all} m_i\,\mathbf{a}_i$$

$$\breve{\omega}_S \doteq \pm \left|(\mathbf{F}_1/m_s - \mathbf{F}_0/m_s) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)/(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)^2\right|^{1/2}$$

$$\breve{\alpha}_S \doteq d(\breve{\omega}_S)/dt$$

donde $\mathbf{F}_0$ y $\mathbf{F}_1$ son las fuerzas netas que actúan sobre el sistema de referencia S en los puntos 0 y 1, $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}_1$ son las posiciones de los puntos 0 y 1 respecto al sistema de referencia S y m_s es la masa de la partícula S (el punto 0 es el origen del sistema de referencia S y el centro de masa de la partícula S) (el punto 0 pertenece al eje de rotación dinámica y el segmento 01 es perpendicular al eje de rotación dinámica) (el vector $\breve{\omega}_S$ es colineal con el eje de rotación dinámica) (M es la masa del universo)

Observaciones Generales

La mecánica clásica alternativa de partículas presentada en este trabajo es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia y puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir fuerzas ficticias.

Este trabajo considera que si todas las fuerzas obedecen la tercera ley de Newton (en su forma fuerte o en su forma débil) entonces el sistema de referencia universal $\mathring{S}$ es siempre inercial. Por lo tanto, un sistema de referencia S es también inercial cuando $\breve{\omega}_S = 0$ y $\mathbf{A} = 0$.

Sin embargo, si una fuerza no obedece la tercera ley de Newton (en su forma débil) entonces el sistema de referencia universal $\mathring{S}$ es no inercial y el sistema de referencia S es también no inercial cuando $\breve{\omega}_S = 0$ y $\mathbf{A} = 0$.

Por lo tanto, si una fuerza no obedece la tercera ley de Newton (en su forma débil) entonces la nueva dinámica y los principios de conservación son falsos.

Sin embargo, este trabajo considera, por un lado, que todas las fuerzas obedecen la tercera ley de Newton (en su forma fuerte o en su forma débil) y, por otro lado, que todas las fuerzas son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia $(\mathbf{F}' = \mathbf{F})$

Bibliografía

D. Lynden-Bell and J. Katz, Classical Mechanics without Absolute Space (1995)

J. Barbour, Scale-Invariant Gravity: Particle Dynamics (2002)

R. Ferraro, Relational Mechanics as a Gauge Theory (2014)

A. Torassa, Sobre La Mecánica Clásica (1996)

A. Torassa, Mecánica Clásica Alternativa (2013)

A. Torassa, Una Reformulación de la Mecánica Clásica (2014)

A. Torassa, Un Nuevo Principio de Conservación de la Energía (2014)

Apéndice

Para un sistema de N partículas, las siguientes definiciones son también aplicables:

Momento Angular	$\mathring{\mathbf{L}}' \doteq \sum_i m_i\,(\mathring{\mathbf{r}}_i - \mathring{\mathbf{r}}_{cm}) \times (\mathring{\mathbf{v}}_i - \mathring{\mathbf{v}}_{cm})$
Trabajo	$\mathring{W}' \doteq \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathring{\mathbf{r}}_i - \mathring{\mathbf{r}}_{cm}) = \sum_i \Delta\, {}^1\!/\!_2\, m_i\,(\mathring{\mathbf{v}}_i - \mathring{\mathbf{v}}_{cm})^2$
Energía Cinética	$\Delta\,\mathring{K}' \doteq \sum_i \Delta\, {}^1\!/\!_2\, m_i\,(\mathring{\mathbf{v}}_i - \mathring{\mathbf{v}}_{cm})^2$
Energía Potencial	$\Delta\,\mathring{U}' \doteq \sum_i -\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathring{\mathbf{r}}_i - \mathring{\mathbf{r}}_{cm})$
Lagrangiano	$\mathring{L}' \doteq \mathring{K}' - \mathring{U}'$

donde $\mathring{\mathbf{r}}_{cm}$ y $\mathring{\mathbf{v}}_{cm}$ son la posición universal y la velocidad universal del centro de masa del sistema de partículas. $\sum_i \int_1^2 m_i\,\mathring{\mathbf{a}}_i \cdot d(\mathring{\mathbf{r}}_i - \mathring{\mathbf{r}}_{cm}) = \sum_i \int_1^2 m_i\,(\mathring{\mathbf{a}}_i - \mathring{\mathbf{a}}_{cm}) \cdot d(\mathring{\mathbf{r}}_i - \mathring{\mathbf{r}}_{cm}) = \sum_i \Delta\, {}^1\!/\!_2\, m_i\,(\mathring{\mathbf{v}}_i - \mathring{\mathbf{v}}_{cm})^2$

Si un sistema de N partículas es aislado entonces el momento angular $\mathring{\mathbf{L}}'$ del sistema de partículas permanece constante.

$$\mathring{\mathbf{L}}' = \text{constante}$$

$$d(\mathring{\mathbf{L}}')/dt = \sum_i m_i\,(\mathring{\mathbf{r}}_i - \mathring{\mathbf{r}}_{cm}) \times (\mathring{\mathbf{a}}_i - \mathring{\mathbf{a}}_{cm}) = \sum_i m_i\,(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}) \times \mathring{\mathbf{a}}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0$$

$$\mathring{\mathbf{L}}' \doteq \sum_i m_i\,(\mathring{\mathbf{r}}_i - \mathring{\mathbf{r}}_{cm}) \times (\mathring{\mathbf{v}}_i - \mathring{\mathbf{v}}_{cm}) = \sum_i m_i\,(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}) \times [\,\mathbf{v}_i + \breve{\omega}_S \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}) - \mathbf{v}_{cm}\,]$$

Si un sistema de N partículas es aislado y está sujeto sólo a fuerzas conservativas entonces la energía mecánica $\mathring{E}'$ del sistema de partículas permanece constante.

$$\mathring{E}' \doteq \mathring{K}' + \mathring{U}' = \text{constante}$$

$$\Delta\,\mathring{E}' = \Delta\,\mathring{K}' + \Delta\,\mathring{U}' = 0$$

$$\Delta\,\mathring{K}' \doteq \sum_i \Delta\, {}^1\!/\!_2\, m_i\,(\mathring{\mathbf{v}}_i - \mathring{\mathbf{v}}_{cm})^2 = \sum_i \Delta\, {}^1\!/\!_2\, m_i\,[\,\mathbf{v}_i + \breve{\omega}_S \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}) - \mathbf{v}_{cm}\,]^2$$

$$\Delta\,\mathring{U}' \doteq \sum_i -\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathring{\mathbf{r}}_i - \mathring{\mathbf{r}}_{cm}) = \sum_i -\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}) = \sum_i -\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$$

donde $\mathbf{r}_{cm}$ y $\mathbf{v}_{cm}$ son la posición y la velocidad del centro de masa del sistema de partículas respecto a un sistema de referencia S y $\breve{\omega}_S$ es la velocidad angular dinámica del sistema de referencia S.